오드연결망의 일대다 방송

김종석* 김성원* 이형옥[0]
*영남대학교 전자정보공학부, [0]순천대학교 컴퓨터교육과
rockhee7@gmail.com, swon@yu.ac.kr, oklee@sunchon.ac.kr

One to All Broadcasting of Odd Network

Jong-Seok Kim* Swon Won Kim* Hyeong-Ok Lee[0]
*School of Electrical Engineering and Computer Science,Yeungnam University
[0]Department of Computer Education, Sunchon National University

1. 서 론

방송(Broadcasting)은 상호연결망을 위한 가장 기본적인 데이터 통신기법이며 병렬 알고리즘을 설계하는데 있어서 가장 기본이 되는 작업으로 노드와 노드 사이의 메시지 전송을 의미한다. 방송은 크게 일대다(one-to-all) 방송과 다대다(all-to-all) 방송으로 나눌 수 있으며, 일대다 방송은 메시지를 갖고 있는 한 노드에서 다른 모든 노드로 메시지를 전송하는 것이고, 다대다 방송은 메시지를 갖고 있는 각각의 노드들이 다른 모든 노드들로 메시지를 전송하는 것이다. 이러한 방송은 단일포트를 이용한 방송 기법과 다중포트를 이용한 방송 기법으로 구분된다. 단일포트를 이용한 방송 기법은 하나의 노드에 연결되어 있는 에지들 중에 하나의 에지만 이용하여 메시지를 전달하는 기법이고, 다중포트를 이용한 방송 기법은 하나의 노드에 연결되어 있는 모든 에지들을 이용하여 메시지를 전달하는 기법이다.

오드 연결망은 [1]에서 그래프이론 모델의 하나로 발표되었는데, [2]에서 Ghafoor가 상호연결망으로 소개하였고, 지금까지 최대 고장허용도, 노드 및 에지 대칭성, 노드 중복 없는 경로, 고장 지름, 고장 허용 라우팅 알고리즘과 고장 노드가 없는 라우팅 알고리즘, 하다마드 매트릭스(hadamard matrix)를 이용한 고장허용도 등이 발표되었다[1-3]. 본 논문에서는 오드 연결망 O_d에서 스패닝 트리를 이용한 단일포트 일대다 방송 기법을 제안한다.

2. 관련연구

오드 연결망 O_d의 노드수는 $\binom{2d-1}{d}$이고, 분지수는 d이며, 지름은 d-1이다. 각 노드는 $2d$-1개의 이진비트스트링으로 구성되어 있고, $x_1x_2...x_i...x_{2d-1}$으로 나타내며, 각 노드를 구성하는 이진비트스트링을 보면 이진수 1의 개수가 0의 개수보다 한 개 많다. 두 노드를 연결하는 에지가 존재하는 경우는 오직 한 개의 비트스트링만 같은 두 노드 $U=x_1x_2...x_i...x_{2d-1}$와 $V=\overline{x_1x_2\cdots x_i\cdots x_{2d-1}}$ 사이에 i-에지가 존재한다. 다시 표현하면, 각 노드를 구성하는 이진비트스트링 중에서 하나의 비트스트링 x_i를 제외한 나머지 비트스트링들을 모두 보수로 변환하는 치환을 σ_i라 하면, $U=\sigma_i(V)$인 두 노드 U와 V 사이에 i-에지가 존재한다. 본 논문에서는 오드 연결망 O_d의 노드 주소를 나타낼 때 d-1개의 0과 d개의 1로 구성된 노드 U=0...01...1을 $U=0^{d-1}1^d$로 표현하겠다.

두 노드 U와 V를 연결하는 최단경로를 P라고 하면, P에 포함되는 원소들의 집합은 $S=\{i|r_i=1,\ 1\le i\le 2d-1\}$이거나 $S'=\{i|r_i=0,\ 1\le i\le 2d-1\}$이다. 왜냐하면 임의의 두 노드 U와 V 사이의 거리는 $dist(U,V)=\min\{H_{UV}, H_{U\overline{V}}\}$ 임을 [2]에서 증명했기 때문에 U와 V 사이의 거리가 H_{UV}인 경우에는 P에 포함되는 원소들의 집합은 S이고, U와 V 사이의 거리가 $H_{U\overline{V}}$인 경우에는 P에 포함되는 원소들의 집합은 S'이다.

계층(level) L_0부터 계층 L_n까지의 n+1개의 계층으로 구성되어 있으며, 각 계층에 포함되어 있는 모든 노드는 상위 또는 하위 계층에 포함되어 있는 노드들과 연결되어 있는 연결망을 계층 연결망이라고 한다. 오드 연결망 O_d에서 1-에지들을 모두 제거한 연결망을 O_d^{-1}라고 하자. O_d^{-1}은 계층 L_0부터 L_{2d-3}까지의 계층을 갖는 계층 연결망이다. 연결망 O_d^{-1} 내부의 임의의 두 노드를 $U=0^{d-1}1^d$와 V라고 하면, 두 노드 사이의 거리 $di(U,V)$는 다음과 같다. 두 노드의 첫 번째 비트스트링이 같다면 $di(U,V)$는 H_{UV}이고, 두 노드의 첫 번째 비트스트링이 다르다면 $di(U,V)$는 $H_{U\overline{V}}$이다. 만약 두 노드의 거리 $di(U,V)$가 n이면, 임의의 노드 V는 계층 L_n에 위치한다.

3. 방송

오드 연결망은 노드 대칭이다[1]. 그러므로 오드 연결망의 방송을 위해 노드 $U=0^{d-1}1^d$를 정점으로 하는 스패닝 트리를 만들겠다. 오드 연결망의 구조는 스패닝 트리를 쉽게 만들 수 있다는 장점이 있다. $Pa(V)$는 노드 $V=v_1v_2...v_i...v_{2d-1}$의 부모 노드를 나타내는 함수라고 하고, $Ch(V)$는 노드 V의 자식 노드를 나타내는 함수라고 하자. 노드 V의 2계층 부모 노드를 $g=Pa(Pa(V))=g_1g_2...g_i...g_{2d-1}$라고 하고, $E=\{i|r_i=g_i\oplus v_i=1\}$라고 하자. V가 짝수 계층에 위치해 있는 경우에는 $i^0\in E$과 $i^1\in E$은 $1\le i^0\le d-1$과 $d\le i^1\le 2d-1$이고, $\Psi=\{i^1+1, i^1+2,...,y\}$이다($y<2d$). V가 홀수 계층에 위치해 있는 경우에는 $i^0\in E$과 $i^1\in E$은 $1\le i^1\le d-1$과 $d\le i^0\le 2d-1$이며, $\Psi=\{i^1+1, i^1+2,...,y\}$이다($y<d$).

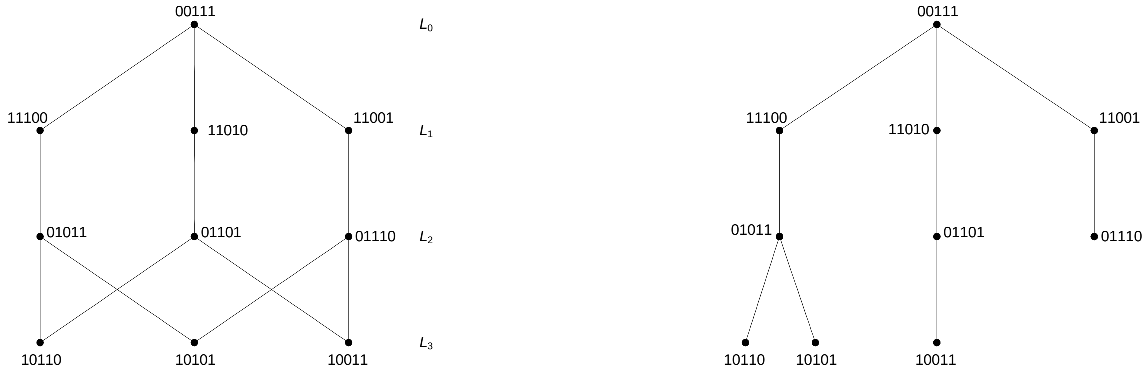
정의 1. 1-에지들을 모두 제거한 오드연결망 O_d^{-1}의 노드 $U=0^{d-1}1^d$라고 하자. $Pa(V)$과 $Ch(V)$에 의해 노드 U를 정점으로 하는 스

패닝 트리 ST를 다음과 같이 정의한다. 스패닝 트리 ST를 구성하는 노드는 O_d^{-1}를 구성하는 노드와 동일하다.

$$Ch(V)=\sigma_h(V), \quad h \in \Psi,$$
$$Pa(V)=\sigma_{i^0}(V)$$

특히, V가 U인 경우, $Pa(V)$는 존재하지 않으며, $Ch(V)=\sigma_a(V)$, $d \le a \le 2d-1$이다. V가 L_1에 위치한 경우 $Pa(V)=U$이며, $Ch(V)=\sigma_j(V)$이고($2 \le j \le d-1$), V가 L_{2d-3}에 위치한 경우 $Ch(V)$는 존재하지 않는다.

정의 1에 의해 오드 연결망 O_3^{-1}의 스패닝 트리 ST를 구하면 다음과 같다.
U=00111이므로 $Ch(U)$=11100($\sigma_3(U)$), 11010($\sigma_4(U)$), 11001($\sigma_5(U)$)이다. 11100, 11010, 11001은 L_1에 위치해 있으므로 세 노드의 $Pa(V)$는 00111이고, Ch(11100)=01011(σ_2(11100)), Ch(11010)=01101(σ_2(11010)), Ch(11001)=01110(σ_2(11001))이다. 01011은 L_2에 위치해 있고 g=00111이므로, E={2,3}, i^0={2}, i^1={3}, Ψ={4,5}이다. Pa(01011)는 01011(σ_2(01011))이고, Ch(01011)=10110(σ_4(01011)), 10101(σ_5(01011))이다. 01101은 L_2에 위치해 있고 g=00111이므로, E={2,4}, i^0={2}, i^1={4}, Ψ={5}이다. Pa(01101)는 11010(σ_2(01101))이고, Ch(01101)=10011(σ_5(01101))이다. 01110은 L_2에 위치해 있고 g=00111이므로, E={2,5}, i^0={2}, i^1={5}, Ψ={}이다. Pa(01110)는 11001(σ_2(01110))이고, Ch(01110)={}이다. 10110, 10101, 10011은 L_{2d-3}에 위치해 있기 때문에 Ch(10110), Ch(10101), Ch(10011)은 존재하지 않고, Pa(10110)=01011(σ_4(10110)), Pa(10101)=01011(σ_5(10101)), Pa(10011)=01101(σ_5(10011))이다.



(a) O_3^{-1} 연결망 (b) 스패닝 트리 ST

그림 1. 1-에지를 모두 제거한 오드연결망 O_3^{-1}와 O_3^{-1}의 스패닝 트리 ST

오드 연결망 O_d^{-1}에서 스패닝 트리 ST를 이용한 단일포트 일대다 방송 기법은 다음과 같다.

1) 메시지 M을 가지고 있는 모든 노드 V를 찾는다.
2) 메시지 M을 가지고 있지 않은 노드 V의 모든 자식 노드 $Ch(V)$를 찾은 후 가장 왼쪽에 위치한 자식 노드에게 메시지 M을 전달한다.
3) L_{2d-3}에 위치한 모든 노드에 메시지 M이 전달 될 때까지 과정 1)과 2)를 반복한다.

4. 결론

본 논문에서는 상호연결망으로 널리 알려진 오드 연결망에서 스패닝 트리를 구하는 방법을 제시하였고, 스패닝 트리를 이용한 효과적인 단일포트 일대다 방송 기법을 제안하였다. 이러한 결과는 앞으로 오드 연결망의 다른 성질들 - 에지 중복 없는 스패닝 트리, 다대다 방송 - 을 분석하는데 많은 도움이 될 것이다.

참고문헌

[1] N. Biggs, "Some Odd Graph Theory," Annals of New York Academy of Sciences, vol. 319, pp.71-81, 1979.
[2] A. Ghafoor and T. R. Bashkow, "A Study of Odd Graphs as Fault-Tolerant Interconnection Networks," IEEE Trans. Computers, vol. 40, no. 2 pp. 225-232, 1991.
[3] Jong-Seok Kim, Hyeong-Ok Lee, "Comments on "A Study of Odd Graphs as Fault-Tolerant Interconnection Networks"," IEEE Trans. Computers, vol. 57, no. 6, pp. 864, 2008.