

이븐 연결망 E_d 의 에지 중복 없는 스패닝 트리를 구성하는 알고리즘

김 종 석[†] · 김 성 원^{††}

요 약

이븐 연결망은 고장허용 다중컴퓨터에 대한 하나의 모형으로 제안된 연결망으로, 간단한 라우팅 알고리즘, 최대고장허용도, 노드 중복 없는 경로와 같은 여러 가지 유용한 성질과 알고리즘들이 분석되었다. 기존에 발표된 라우팅 알고리즘과 노드 중복 없는 경로를 구성하는 알고리즘은 최적임이 증명되었다. 하지만 아직까지 이븐 연결망에서 에지 중복 없는 스패닝 트리를 구성하는 기법은 소개되지 않았다. 에지 중복 없는 스패닝 트리는 상호연결망의 고장허용도의 성능 향상과 효율적인 방송 기법을 분석하기 위해서 사용되는 매우 유용한 기법이다. 기존에 발표된 라우팅 알고리즘 또는 노드 중복 없는 경로를 구성하는 알고리즘은 라우팅 또는 노드 중복 없는 경로를 위한 알고리즘으로 에지 중복 없는 스패닝 트리를 구성하기 위해 적용될 수 없는 알고리즘이다. 본 논문에서는 이븐 연결망 E_d 에서 에지 중복 없는 스패닝 트리를 구성하는 알고리즘을 제안한다.

키워드 : 상호연결망, 이븐연결망, 에지 중복 없는 스패닝 트리, 알고리즘

Constructing Algorithm of Edge-Disjoint Spanning Trees in Even Interconnection Network E_d

Kim Jongseok[†] · Kim Sung Won^{††}

ABSTRACT

Even networks were introduced as a class of fault-tolerant multiprocessor networks and analyzed so many useful properties and algorithms such as simple routing algorithms, maximal fault tolerance, node disjoint path. Introduced routing algorithms and node disjoint path algorithms are proven to be optimal. However, it has not been introduced to constructing scheme for edge-disjoint spanning trees in even networks. The design of edge-disjoint spanning trees is a useful scheme to analyze for measuring the efficiency of fault tolerant of interconnection network and effective broadcasting. Introduced routing algorithm or node disjoint path algorithm are for the purpose of routing or node disjoint path hence they are not applicable to constitute edge disjoint spanning tree. In this paper, we show a construction algorithm of edge-disjoint spanning trees in even network E_d .

Keywords : Interconnection Network, Even Network, Edge-Disjoint Spanning Tree, Algorithm

1. 서 론

현대의 공학과 과학 기술의 발달, 특히 VLSI 기술과 광섬유(optic fiber) 기술의 발달로 인해 고성능 컴퓨터에 대한 요구 증가로 병렬 처리 컴퓨터에 대한 관심이 증가하고 있다. 병렬 처리 컴퓨터는 크게 다중 프로세서(multi-processor) 시스템과 다중 컴퓨터(multi-computer) 시스템으로 나눌 수

있다. 다중 컴퓨터 시스템은 자신의 메모리를 갖는 프로세서들을 상호 연결망으로 연결하고 프로세서들 사이에 통신은 상호 연결망을 통해 메시지를 교환하는 방식으로 이루어진다. 이러한 다중 컴퓨터에서 각 프로세서를 연결하는 상호 연결망 구조는 전체 시스템의 성능 및 확장성에 큰 영향을 미치는 것으로 병렬 처리 컴퓨터 개발의 기반 기술 제공을 위해 그 필요성이 증가되고 있다.

상호연결망은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이에 통신 링크를 에지로 표현한다. 상호연결망을 구성하는 요소 즉, 프로세서(processor)와 통신 링크(link)들이 증가하면서 구성 요소들의 고장 가능성은 더욱더 높아지고 있으므로 대규모 연결망일수록 높은 고장 허용도를 필요로 하며,

※ 이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (2010-0015236).

† 정 회 원: 영남대학교 정보통신공학과 연구교수

†† 정 회 원: 영남대학교 정보통신공학과 부교수(교신저자)

논문접수: 2009년 12월 18일

수정일: 1차 2010년 3월 12일, 2차 2010년 4월 5일

심사완료: 2010년 5월 20일

연결망의 일부분에서 고장이 발생해도 전체 성능을 유지할 수 있는 방안들이 요구된다. 특히 상호연결망에서는 프로세서와 프로세서 간에 메시지 전송을 위한 라우팅 알고리즘과 최단 경로 길이에 의해 성능이 결정된다.

본 논문에서는 이븐 연결망 E_d 에서 에지 중복 없는 스페닝 트리를 구성하는 알고리즘을 제안한다. 이븐 연결망 E_d 는 고장허용 다중컴퓨터에 대한 하나의 모형으로 [3]에서 제안되었다. 이븐 연결망 E_d 에 대한 연구는 최대고장허용도, 노드 및 에지 대칭성, 노드중복 없는 경로, 간단한 라우팅 알고리즘, 하다마드 매트릭스(hadamard matrix)를 이용한 고장허용도, 방송, 임베딩 등이 발표되었다[3, 4, 7, 8, 10, 12, 13].

연결망의 모든 노드들로 구성된 트리를 스페닝 트리라 하며, 둘 이상의 스페닝 트리 내부에 동일한 방향성 에지가 중복 사용되지 않을 때, 그 스페닝 트리를 에지 중복 없는 스페닝 트리(edge-disjoint spanning trees)라 한다. 상호연결망에서 에지 중복 없는 스페닝 트리에 관한 연구들이 [1, 2, 5, 6, 9, 11, 14]에서 발표되었다. 상호연결망에서 에지 중복 없는 스페닝 트리는 연결망의 두 가지 성능 분석을 위해 주로 사용된다. 첫째, 상호연결망에서 고장허용도의 성능 향상을 위해서이고 둘째, 상호연결망의 효율적인 방송 기법을 분석하기 위해서 사용된다. 상호연결망에서 만들어진 에지 중복 없는 스페닝 트리를 구성하는 에지들은 모두 방향성 에지들이다. 본 논문에서 제안하는 알고리즘은 이븐 연결망의 다-대-다 방송(All-to-all broadcasting)과 고장진단도(diagnosibility) 분석을 위한 기초적인 자료가 될 것이다.

논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 이븐 연결망 E_d 의 성질에 대해 알아보고, 3장에서는 이븐 연결망 E_d 에서 에지 중복 없는 스페닝 트리를 구성하는 방법을 보이며, 마지막으로 결론을 맺도록 하겠다.

2. 관련 연구

이븐 연결망 E_d 의 노드수는 $\binom{2d-2}{d-1}$ 이고, 분지수는 d 이며, 지름 $D(E_d)$ 은 $d-1$ 이다. 이븐 연결망 E_d 의 각 노드는 이진수의 비트스트링 $u_1u_2...u_i...u_{2d-3}$ 으로 나타내고, 각 노드를 구성하는 비트스트링에서 이진수 "0"과 "1"의 개수는 한 개 차이난다. 즉, $|0|=|1|±1$ 이다. $|a|$ 는 a 의 개수를 나타낸다. 이븐 연결망 E_d 의 임의의 두 노드를 $U=u_1u_2...u_i...u_{2d-3}$ 와 $V=v_1v_2...v_i...v_{2d-3}$ 이라 할 때, 두 노드 U 와 V 사이에 Exclusive-OR 함수(\oplus)를 적용시킨 결과를 $R=r_1r_2...r_i...r_{2d-3}$ ($r_i=u_i\oplus v_i$)라고 표시하겠다($1 \leq i \leq 2d-3$). 두 노드 U 와 V 사이의 해밍거리(hamming distance) H_{UV} 는 $r_i=1$ 인 r_i 의 개수이다. 노드를 연결하는 에지는 노드의 해밍거리가 1 혹은 $2d-3$ 인 두 노드 사이에 에지가 존재한다. 해밍거리가 1인 두 노드를 연결하고 있는 에지를 i -에지라 하고, 해밍거리가 $2d-3$ 인 두 노드를 연결하고 있는 에지를 c -에지라 하겠다. 다시 표현하면, 각 노드를 구성하는 이진비트스트링 중에서

하나의 비트스트링 x_i 만 보수로 변환하는 연산을 σ_i 라 하면, $U=\sigma_i(V)$ 인 두 노드 U 와 V 사이에 i -에지가 존재하고, 각 노드를 구성하는 이진비트스트링 중에서 모든 비트스트링을 보수로 변환하는 연산을 σ_c 라 하면, $U=\sigma_c(V)$ 인 두 노드 U 와 V 사이에 c -에지가 존재한다. 이븐 연결망 E_d 는 노드대칭이고, 이분할연결망(bipartite network)이며, E_d 의 내부에는 홀수 길이 사이클은 존재하지 않는다[3].

본 논문에서는 이븐 연결망 E_d 의 한 노드, $d-2$ 개의 0과 $d-1$ 개의 1로 구성된 노드 $U=0...01...1$ 을 $U=0^{d-2}1^{d-1}$ 로 표현하겠다. 두 노드 U 와 V 사이의 거리(distance)를 $dist(U,V)$ 라고 표시하면, 두 노드 사이의 거리 $dist(U,V)$ 는 다음과 같다 [3].

$$dist(U,V)=\min(H_{UV}, 2d-2-H_{UV})$$

임의의 노드 U 에서 치환 $\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \dots, \sigma_{k_t}$ 을 순차적으로 적용하여 정해지는 경로를 $[k_1, k_2, \dots, k_t]$ 로 표시하겠다. 두 노드 U 와 V 를 연결하는 최단경로를 P 라고 하면, P 에 포함되는 원소들의 집합은 $S=\{i|r_i=1, 1 \leq i \leq 2d-3\}$ 이거나 $S'=\{c, i|r_i=0, 1 \leq i \leq 2d-3\}$ 이다. 왜냐하면 임의의 두 노드 U 와 V 사이의 거리는 $dist(U,V)=\min(H_{UV}, 2d-2-H_{UV})$ 임을 [3]에서 증명했기 때문에 U 와 V 사이의 거리가 H_{UV} 인 경우에는 P 에 포함되는 원소들의 집합은 S 이고, U 와 V 사이의 거리가 $2d-2-H_{UV}$ 인 경우에는 P 에 포함되는 원소들의 집합은 S' 이다. 예를 들어 이븐 연결망 E_4 에서 노드 $U=00111$, 노드 $V=10101$ 이라고 하면, $R=10010$ 이므로 $H_{UV}=2$ 이고 $S=\{1,4\}$ 이고, $2d-2-H_{UV}=4$ 이고 $S'=\{c,2,3,5\}$ 이므로 $dist(U,V)=H_{UV}=2$ 임을 알 수 있고, 최단경로 P 는 $[4,1]$ 이다. 최단경로 P 는 경로 P 를 구성하는 i 들 중에 홀수 위치에 있는 i 들의 순서 또는 짝수 위치에 있는 i 들의 순서에 상관없이 구성될 수 있다. 예를 들어 이븐 연결망 E_6 에서 노드 $U=000011111$, 노드 $V=110011001$ 이라고 하면, $R=110000110$ 이므로 $H_{UV}=4$, $S=\{1,2,7,8\}$ 이고, $2d-2-H_{UV}=6$ 이고 $S'=\{3,4,5,6,9\}$ 이므로 $dist(U,V)=H_{UV}=4$ 임을 알 수 있고, 최단경로 P 는 $[7,1,8,2], [8,1,7,2], [7,2,8,1], [8,2,7,1]$ 이다.

[보조정리 1] 이븐 연결망 E_d 의 두 노드를 $U(=0^{d-2}1^{d-1})$ 와 V 라고 하자. U 와 V 를 연결하는 t 개의 에지들로 구성된 경로를 P 라고 하고, 경로 P 를 구성하는 t 개의 에지들이 순환적(cyclic)으로 이동(rotate)하여 구성된 경로를 Q 라고 하자. 두 경로 P 와 Q 를 합치면 길이 $2t$ 인 사이클이 구성된다.

(증명) 증명을 위해 두 경로 P 와 Q 안에 공통 노드 $W (\neq U,V)$ 가 존재한다고 가정하자. 그러면 경로 P 상에는 노드 U 와 노드 W 를 연결하는 t^* 개의 에지들로 구성된 경로 P^* 가 존재할 것이고, 경로 Q 상에는 노드 U 와 노드 W 를 연결하는 t^* 개의 에지들로 구성된 경로 Q^* 가 존재할 것이다. 그러나 이러한 경로 P^* 와 Q^* 는 존재할 수 없다. 경로 Q 는 경로 P 를 구성하는 t 개의 에지들이 순환적(cyclic)으로 이동

(rotate)하여 구성된 경로라고 했으므로, 경로 P^* 와 Q^* 를 구성하는 에지들은 동일할 수가 없기 때문이다. 그렇기 때문에 두 경로 안에는 공통노드 $W(\neq U, V)$ 가 존재하지 않는다. 그러므로 두 경로 P 와 Q 를 합치면 길이 $2t$ 인 사이클이 구성됨을 알 수 있다.

예를 들어, 이분 연결망 E_8 의 두 노드를 $U=0000001111111$, $V=1010101010101$ 하고 하면, 두 노드를 연결하는 하나의 경로 P 는 6개의 에지들로 구성된 $[8,1,10,3,12,5]$ 이다. 경로 $[10,3,12,5,8,1]$ 은 경로 P 를 구성하는 에지들이 왼쪽으로 2만큼 순환적으로 이동하여 구성된 경로이므로 경로 Q 가 된다. 두 경로 P 와 Q 를 합치면 경로 $PQ=[8,1,10,3,12,5,1,8,5,12,3,10]$ 가 구성된다. 노드 U 에 경로 PQ 를 적용하면 노드 U 로 돌아오며 노드 중복이 발생하지 않음을 알 수 있다. 즉, 경로 PQ 에 의해 노드 U 와 노드 V 가 포함된 길이 12인 사이클이 구성됨을 알 수 있다. □

[보조정리 2] 이분 연결망 E_d 의 임의의 노드 U 에 치환 σ_i ($1 \leq i \leq 2d-3$)와 σ_c 를 모두 적용하면 길이 $2d-2$ 인 하나의 사이클을 구성한다[3].

계층(level) L_0 부터 계층 L_n 까지의 $n+1$ 개의 계층으로 구성되어 있으며, 각 계층에 포함되어 있는 모든 노드는 상위 또는 하위 계층에 포함되어 있는 노드들과 연결되어 있는 연결망을 계층 연결망이라고 한다. 이분 연결망 E_d 를 계층 연결망으로 나타내면 계층 L_0 부터 L_{d-1} 까지의 계층을 갖는다. 이분 연결망 E_d 의 임의의 두 노드를 $U=0^{d-2}1^{d-1}$ 와 W 라고 하자. 만약 두 노드의 거리 $dist(U, W)$ 가 m 이면, 임의의 노드 W 는 계층 L_m 에 위치한다. (그림 1)은 계층 연결망으로 나타낸 E_4 이다.

3. 에지 중복 없는 스페닝 트리

이분 연결망 E_d 내부의 두 노드를 $U(=0^{d-2}1^{d-1})$ 와 $V(=v_1v_2 \dots v_i \dots v_{2d-3})$ 라고 하고, 두 노드 사이에 XOR 함수를 적용한 결과를 $R(=r_1r_2 \dots r_i \dots r_{2d-3})$ 이라고 하자. $r_i=1$ 인 i 들의 집합 R^1

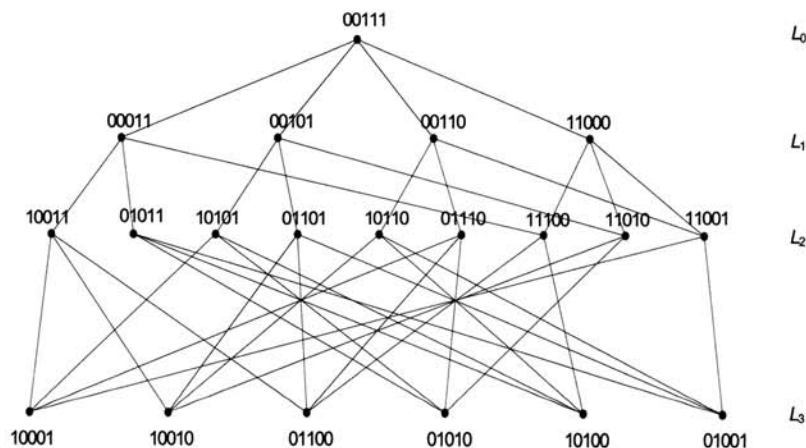
을 다음과 같은 두 시퀀스로 구성하겠다. $1 \leq i \leq d-2$ 이면, $H_1 = \langle i_1, i_2, \dots, i_g \rangle$ 이고, $d-1 \leq i \leq 2d-3$ 이면, $H_2 = \langle i_{g+1}, i_{g+2}, \dots, i_t \rangle$ 라고 하고, $i_1 < i_2 < \dots < i_g < \dots < i_t$ 이다. t 가 홀수이면 $g = \frac{t-1}{2}$ 이고,

t 가 짝수이면 $g = \frac{t}{2}$ 이다. 또한, $r_i=0$ 인 i 들의 집합을 시퀀스 R^0 을 다음과 같은 두 시퀀스로 구성하겠다. $1 \leq i \leq d-2$ 이면, $H_3 = \langle i_1, i_2, \dots, i_y \rangle$ 이고, $d-1 \leq i \leq 2d-3$ 이면, $H_4 = \langle i_{y+1}, i_{y+2}, \dots, i_t \rangle$ 이라고 하고, $i_1 < i_2 < \dots < i_y < \dots < i_t$ 이다. t 가 홀수이면 $y = \frac{t-1}{2}$ 이고, t 가 짝수이면 $y = \frac{t}{2}$ 이다.

$CR_z(S)$ 는 시퀀스 S 의 구성 요소를 왼쪽으로 로테이트(rotate)한 시퀀스이고, z 는 S 의 구성 요소를 왼쪽으로 로테이트한 횟수를 나타낸다. 예를 들어, $S = \langle 1, 2, \dots, n \rangle$ 이면, $CR_0(S) = \langle 1, 2, \dots, n \rangle$ 이고, $CR_3(S) = \langle 4, 5, \dots, n, 1, 2, 3 \rangle$ 이다. S^f 는 시퀀스 S 의 구성 요소 중 특정 요소 f 를 제외한 시퀀스를 나타낸다. 예를 들어, $S = \langle 1, 2, \dots, n \rangle$ 이면, $S^2 = \langle 1, 3, \dots, n \rangle$ 이다. 본 논문에서는 홀수를 od , 짝수를 ev 로 표현하고, $CR_x(H_1) = \langle s_1, s_2, \dots, s_g \rangle$, $CR_x(H_2) = \langle s_{g+1}, s_{g+2}, \dots, s_t \rangle$, $CR_x(H_3) = \langle s_1, s_2, \dots, s_y \rangle$, $CR_x(H_4) = \langle s_{y+1}, s_{y+2}, \dots, s_t \rangle$ 라고 하겠다. x 는 $s_{g+1} = \alpha$ 또는 $s_{y+1} = \alpha$ 가 되도록 H_2 또는 H_4 의 구성 요소를 왼쪽으로 로테이트한 횟수이다.

이분 연결망 E_d 내부의 임의의 두 노드 U 와 V 를 연결하는 경로를 P 라고 하자. 경로 P 를 구성하는 원소들 중에 홀수 위치에 있는 원소들을 $S_1 = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ 이라고 나타내고, 짝수 위치에 있는 원소들을 $S_2 = (b_1, b_2, \dots, b_q)$ 라고 나타내겠다($c \notin P$). 교환 순서(\otimes)는 S_1 과 S_2 의 원소들을 순서대로 하나씩 번갈아 나타내는 집합을 구성한다. 예를 들면, $S_1 = (5, 6, 7)$, $S_2 = (2, 3, 4)$ 라고 하면 $S_1 \otimes S_2 = (5, 2, 6, 3, 7, 4)$ 이다. 그리고 경로 P 에 c -에지가 포함되는 경우는 c 의 위치에 따라 $c \circ S_1 \otimes S_2$ 또는 $S_1 \otimes S_2 \circ c$ 라고 나타내겠다. 예를 들면, $S_1 = (5, 6, 7)$, $S_2 = (2, 3, 4)$ 라고 하면 $c \circ S_1 \otimes S_2 = (c, 5, 2, 6, 3, 7, 4)$ 이고 $S_1 \otimes S_2 \circ c = (5, 2, 6, 3, 7, 4, c)$ 이다.

이분 연결망 E_d 의 에지 중복 없는 스페닝 트리들을 다음



(그림 1) 계층연결망으로 나타낸 E_4

과 같이 구성하겠다. 이본 연결망 E_d 는 노드 대칭[3, 4]이므로, 에지 중복 없는 스패닝 트리들의 정점을 $U=0^{d-2}1^{d-1}(cL_0)$ 라고 하겠다. 그러면 노드 U 의 자식 노드 $ch(U)(cL_1)$ 는 α -에지에 의해 노드 U 와 연결된다. 본 논문에서는 에지 중복 없는 스패닝 트리를 T_α 라고 표현 하겠다($d \leq \alpha \leq 2d-3$ 또는 $\alpha=c$). T_α 의 정점 노드 U 는 오직 하나의 자식 노드 $ch(U)$ 만을 갖는다.

이본 연결망 E_d 의 임의의 노드 V 의 부모노드 $pa(V)$ 를 구하는 기법은 다음과 같다.

(경우 1) $\alpha=c$ 인 경우

(경우 1-1) $dist(U,V)=H_{UV} \neq d-1$ 인 경우: 경로 P 는 $c \circ H_2 \oplus H_1 \circ c$ 에 의해 구성된다. 그러므로 노드 V 의 부모 노드 $pa(V)$ 는 $\sigma_c(V)$ 이다.

예) $U=00111, V=01011$ 이고 $\alpha=3$ 이라 하자. 그러면 $R^1=\{2,3\}, H_2=\langle 3 \rangle, H_1=\langle 2 \rangle$ 이므로 $pa(01011)=\sigma_c(V)=10100$ 이다.

(경우 1-2) $dist(U,V)=2d-2-H_{UV}$ 인 경우: 경로 P 는 $c \circ H_4 \oplus H_3$ 에 의해 구성된다. 그러므로 노드 V 의 부모 노드 $pa(V)$ 는 $\sigma_{i_t}(V)(V \subset L_{od})$ 또는 $\sigma_{i_y}(V)(V \subset L_{ev})$ 또는 $\sigma_c(V)(V=1^{d-2}0^{d-1})$ 이다.

예) $U=00111, V=01100$ 이고 $\alpha=3$ 이라 하자. 그러면 $R^2=\{1,3\}, H_4=\langle 3 \rangle, H_3=\langle 1 \rangle$ 이므로 $pa(01100)=\sigma_{i_y}(V)=11100$ 이다.

(경우 2) $\alpha \neq c$ 인 경우

(경우 2-1) $V=\overline{U}$ 인 경우: 경로 $P=[\alpha, c, \alpha]$ 이므로 노드 V 의 부모 노드 $pa(V)$ 는 $\sigma_\alpha(V)$ 이다.

예) $U=00111, V=11000$ 이고 $\alpha=3$ 이라 하자. 그러면 $P=[3, c, 3]$ 이므로 $pa(11000)=\sigma_c(V)=11100$ 이다.

(경우 2-2) $\alpha \subset H_2$ 이고 $V \neq U$ 인 경우: 경로 P 는 $CR_x(H_2) \oplus CR_x(H_1)$ 이므로 노드 V 의 부모 노드 $pa(V)$ 는 $\sigma_{s_g}(V)(V \subset L_{ev})$ 또는 $\sigma_{s_t}(V)(V \subset L_{od})$ 이다.

예) $U=00111, V=10001(cL_3)$ 이고 $\alpha=3$ 이라 하자. 그러면 $R^1=\{1,3,4\}, H_2=\langle 3,4 \rangle, H_1=\langle 1 \rangle$ 이므로 $pa(10001)=\sigma_{s_t}(V)=10011$ 이다.

(경우 2-3) $\alpha \subset H_4$ 이고 $dist(U,V)=H_{UV}=d-2$ 이고 d =홀수인 경우: 경로 P 는 $CR_x(H_4) \oplus CR_x(H_3)^{-sl} \circ c \circ s_1$ 이므로 노드 V 의 부모 노드 $pa(V)$ 는 $\sigma_{s_1}(V)$ 이다.

예) $U=0001111, V=1001001$ 이고 $\alpha=3$ 이라 하자. 그러면 $d=5, H_4=\langle 4,7 \rangle, H_3=\langle 2,3 \rangle$ 이므로 $P=[4,3,7,c,2]$ 이고

$$pa(1001001)=\sigma_{s_1}(V)=1101001 \text{이다.}$$

(경우 2-4) $\alpha \subset H_4$ 이고 $dist(U,V)=H_{UV} \neq d-1$ 인 경우: $V \subset L_{ev}$ 인 경우 경로 P 는 $\alpha \circ CR_x(H_1) \oplus CR_x(H_2)^{-\alpha} \circ \alpha$ 이므로 $pa(V)$ 는 $\sigma_\alpha(V)$ 이고, $V \subset L_{od}$ 인 경우 경로 P 는 $\alpha \circ h_1 \circ CR_x(H_2) \oplus CR_x(H_1) \circ \alpha \circ h_1$ 이므로 노드 V 의 부모 노드 $pa(V)$ 는 $\sigma_{h_1}(V)$ 이다. h_1 은 $CR_x(H_3)$ 의 첫 번째 구성요소이다.

예) $U=00111, V=00101(cL_1)$ 이고 $\alpha=3$ 이라 하자. 그러면 $H_1=\emptyset, H_3=\langle 1,2 \rangle, H_2=\langle 4 \rangle$ 이므로 $P=[3,1,4,3,1]$ 이고 $pa(00101)=\sigma_{s_1}(V)=10101$ 이다.

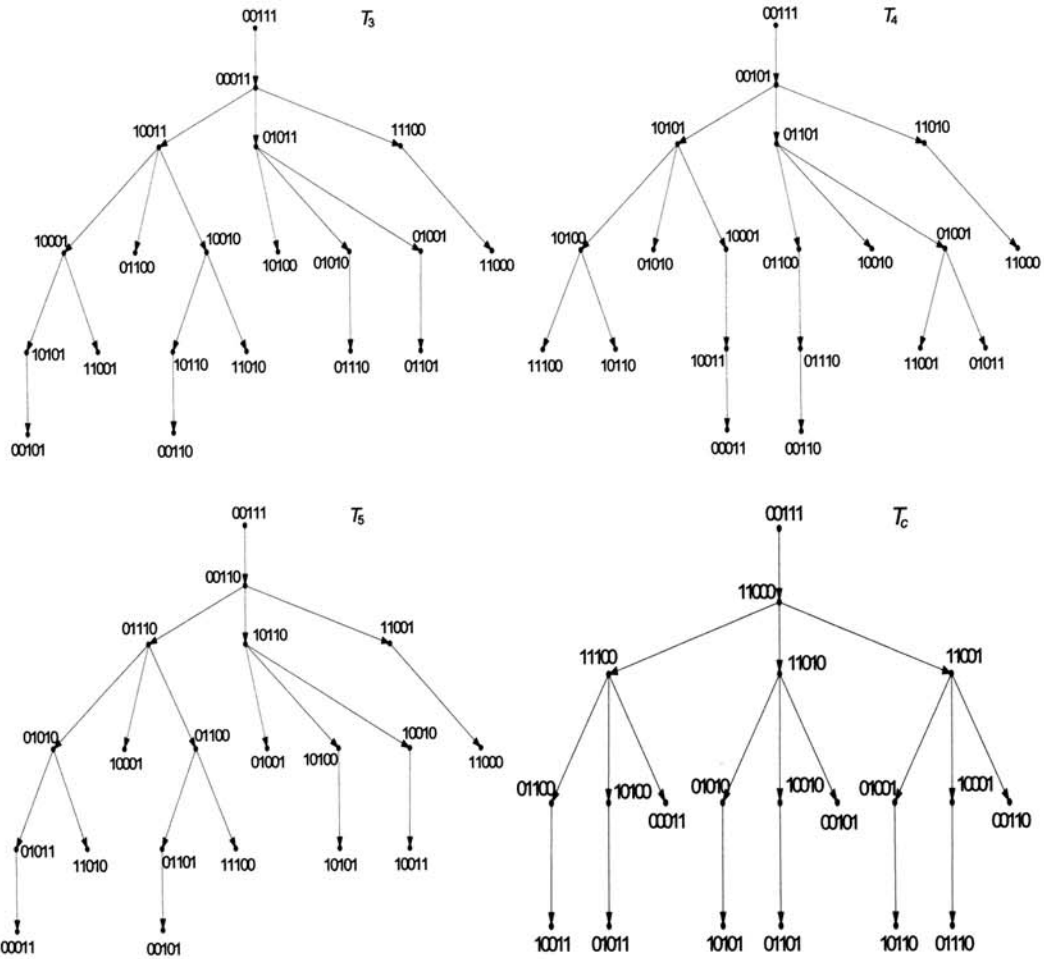
(경우 2-5) $\alpha \subset H_4$ 이고 $dist(U,V)=2d-2-H_{UV}$ 인 경우: 경로 P 는 $CR_x(H_4) \oplus CR_x(H_3) \circ c$ 이므로 노드 V 의 부모 노드 $pa(V)$ 는 $\sigma_c(V)$ 이다.

예) $U=00111, V=11100$ 이고 $\alpha=3$ 이라 하자. 그러면 $H_3=\emptyset, H_4=\langle 3 \rangle$ 이므로 $P=[3, c]$ 이고 $pa(11100)=\sigma_c(V)=00011$ 이다.

이본 연결망 E_d 의 에지 중복 없는 스패닝 트리를 T_α 를 구성하는 알고리즘은 다음과 같다.

```

Procedure  $T_\alpha$ 
begin
  for each  $v(\neq u, ch(u)) \in E_d$  do
    if ( $(\alpha=c$  and  $dist(U,V)=H_{UV} \neq d-1)$  or
        ( $\alpha=c$  and  $dist(U,V)=2d-2-H_{UV}$  and  $V=1^{d-2}0^{d-1}$ ) or
        ( $\alpha \neq c$  and  $\alpha \subset H_4$  and  $dist(U,V)=2d-2-H_{UV}$ ))
      then  $pa(V)=\sigma_c(V)$ 
    elseif ( $\alpha=c$  and  $dist(U,V)=2d-2-H_{UV}$  and  $V \subset L_{od}$ )
      then  $pa(V)=\sigma_{i_t}(V)$ 
    elseif ( $\alpha=c$  and  $dist(U,V)=2d-2-H_{UV}$  and  $V \subset L_{ev}$ )
      then  $pa(V)=\sigma_{i_y}(V)$ 
    elseif ( $(\alpha \neq c$  and  $V=\overline{U})$  or
            ( $\alpha \neq c$  and  $\alpha \subset H_4$  and  $dist(U,V)=H_{UV} \neq d-1$  and  $V \subset L_{ev}$ ))
      then  $pa(V)=\sigma_\alpha(V)$ 
    elseif ( $\alpha \neq c$  and  $\alpha \subset H_2$  and  $V \neq U$  and  $V \subset L_{ev}$ )
      then  $pa(V)=\sigma_{s_g}(V)$ 
    elseif ( $\alpha \neq c$  and  $\alpha \subset H_2$  and  $V \neq U$  and  $V \subset L_{od}$ )
      then  $pa(V)=\sigma_{s_t}(V)$ 
    elseif ( $\alpha \neq c$  and  $\alpha \subset H_4$  and  $dist(U,V)=H_{UV}=d-2$  and  $d$ =홀수)
      then  $pa(V)=\sigma_{s_1}(V)$ 
    else  $pa(V)=\sigma_{h_1}(V)$ 
  enddo
end  $T_\alpha$ 
    
```



(그림 2) E_d 의 에지 중복 없는 스패닝 트리들

제안된 알고리즘을 이분연결망 E_d 에 적용하여 구성된 에지 중복 없는 스패닝 트리들을 (그림 2)에 나타내었다.

제안된 알고리즘은 각 조건에 따라 E_d 의 노드 U 와 임의의 노드 V 를 연결하는 단 하나의 경로를 구하는 알고리즘이므로 알고리즘에 의해 설정된 경로 P 는 고유한 경로(unique path)임을 알 수 있다. 그리고 알고리즘에 적용되는 노드들은 E_d 의 모든 노드들이므로 다음과 같은 정리를 구할 수 있다.

[정리 1] 노드 $U(=0^{d-2}1^{d-1})$ 를 정점으로 하는 트리 T_α 는 E_d 의 스패닝 트리이다($d \geq 3, d \leq \alpha \leq 2d-3$ 또는 $\alpha=c$).

트리를 구성하는 정점 노드 U 로부터 최대 거리를 갖는 임의의 노드 V 까지의 거리를 트리의 높이(height)라고 한다. 다음의 정리를 통해 노드 $U(=0^{d-2}1^{d-1})$ 를 정점으로 하는 트리 T_α 의 높이를 구하겠다.

[정리 2] 노드 $U(=0^{d-2}1^{d-1})$ 를 정점으로 하는 트리 T_α 의 높이는 $d=3$ 일 때는 3이고, $d=4$ 일 때는 5이며, $d \geq 5$ 일 때는 $2d-4$ 이다($d \geq 3, d \leq \alpha \leq 2d-3$ 또는 $\alpha=c$).

(증명) 스패닝 트리 T_α 내부의 노드 U 로부터 노드 V 에 이르는 경로를 P 라고 하자. $d=3,4$ 인 경우와 $\alpha=c$ 인 경우와 $\alpha \neq c$ 인 경우로 나누어 증명하겠다.

1) $d=3,4$ 인 경우: 노드 U 로부터 최대 거리를 갖는 임의의 노드 V 가 존재할 조건은 $V < L_1$ 이고 $\alpha < H_1$ 이다. $d=3$ 일 때 $\alpha=2, V=010$ 이라고 하면 주어진 조건을 만족함을 알 수 있다. 제안된 알고리즘에 의해 경로 P 는 $CR_x(H_4) \oplus CR_x(H_3)^{-s_1} \circ c \circ s_1$ 이므로 경로 P 의 길이는 3이다. $d=4$ 일 때 $\alpha=3, V=00101$ 이라고 하면 주어진 조건을 만족함을 알 수 있다. 제안된 알고리즘에 의해 경로 P 는 $\alpha \circ h_1 \circ CR_x(H_2) \oplus CR_x(H_1) \circ \alpha \circ h_1$ 이므로 경로 P 의 길이는 5이다.

2) $\alpha=c$ 인 경우: 노드 U 로부터 최대 거리를 갖는 임의의 노드 V 는 $H_{UV}=d-2$ 인 노드이다. 제안된 알고리즘에 의해 경로 P 는 $c \circ H_2 \oplus H_1 \circ c$ 이다. 경로 $H_2 \oplus H_1$ 의 길이는 $d-2$ 이므로 경로 P 의 길이는 d 임을 알 수 있다.

3) $\alpha \neq c$ 인 경우: 노드 U 로부터 최대 거리를 갖는 임의의 노드 V 가 존재할 조건은 $V < L_2$ 이고 $\alpha < H_2$ 이다. $\alpha=d-1$ 라고 하고 $V=1^{d-2}0^{d-1}$ 이라고 하면 주어진 조건을 만족함을 알

수 있다. 제안된 알고리즘에 의해 경로 P 는 $CR_x(H_2) \oplus CR_x(H_1)$ 이므로 두 노드 U 와 V 사이의 거리는 $2d-4$ 이다.

이상의 증명에 의해 트리 T_α 의 높이는 $d=3$ 일 때는 3이고, $d=4$ 일 때는 5이며, $d \geq 5$ 일 때는 $2d-4$ 임을 알 수 있다. □

다음의 정리 3과 4를 통해 제안된 알고리즘에 의해 구성된 각 스페닝 트리가 에지 중복 없는 스페닝 트리임을 보이겠다.

[정리 3] 노드 $U(=0^{d-2}1^{d-1})$ 를 정점으로 하는 스페닝 트리 T_α 와 T_c 는 에지 중복 없는 스페닝 트리이다($d \geq 3, d \leq \alpha \leq 2d-3$).

(증명) 트리 T_α 와 T_c 는 E_d 의 스페닝 트리임을 정리 1에 의해 알 수 있다. E_d 의 임의의 노드를 V 라고 하자. 스페닝 트리 T_β 내부의 노드 U 로부터 노드 V 에 이르는 경로를 P 라고 하고, 스페닝 트리 T_γ 내부의 노드 U 로부터 노드 V 에 이르는 경로를 Q 라고 하자. 경로 P 와 경로 Q 사이에 에지 중복이 없다는 것을 보임으로써 T_β 와 T_γ 는 에지 중복 없는 스페닝 트리임을 보이겠다. 다음의 다섯 가지 경우로 나누어 증명하겠다.

1) $\alpha \subset H_2$ 이고 $dist(U,V)=H_{UV}$ 인 경우: 경로 P 는 $CR_x(H_2) \oplus CR_x(H_1)$ 이고 경로 Q 는 $c \circ H_2 \oplus H_1 \circ c$ 이다. 경로 P 와 경로 Q 를 연결한 경로를 PQ 라고 하면, 경로 PQ 는 보조정리 1에 의해 사이클을 구성함을 알 수 있다. 그러므로 경로 P 와 경로 Q 사이에 에지 중복이 없다는 것을 알 수 있다.

2) $\alpha \subset H_2$ 이고 $dist(U,V)=2d-2-H_{UV}$ 인 경우: 경로 P 는 $CR_x(H_2) \oplus CR_x(H_1)$ 이고 경로 Q 는 $c \circ H_4 \oplus H_3$ 이다. 경로 P 와 경로 Q 를 연결한 경로를 PQ 라고 하면, 경로 PQ 는 보조정리 2에 의해 사이클을 구성함을 알 수 있다. 그리고 $V = \bar{U}$ 일 때는 경로 P 는 $[\alpha, c, \alpha]$ 이고 경로 Q 는 $[c]$ 이므로, 두 경로를 연결하면 $[\alpha, c, \alpha, c]$ 이다. 연결된 경로는 보조정리 1에 의해 사이클을 구성함을 알 수 있다. 그러므로 경로 P 와 경로 Q 사이에 에지 중복이 없다는 것을 알 수 있다.

3) $\alpha \subset H_4$ 이고 $dist(U,V)=H_{UV}=d-2$ 이고 $d=$ 홀수인 경우: 경로 P 는 $CR_x(H_4) \oplus CR_x(H_3)^{-s1} \circ c \circ s_1$ 이고, 경로 Q 는 $c \circ H_2 \oplus H_1 \circ c$ 이다. 경로 $P'=CR_x(H_4) \oplus CR_x(H_3)^{-s1} \circ c$ 에 의해 연결되는 노드를 V' 라고 하고, 경로 $Q'=c \circ H_2 \oplus H_1$ 에 의해 연결되는 노드를 V'' 라고 하자. 두 노드 V' 와 V'' 를 동일한 노드라고 가정하자. 그러면 두 경로 P' 와 Q' 를 연결하면 연결된 경로 $P'Q'$ 는 보조정리 1 또는 2에 의해 사이클을 구성해야 한다. 하지만 경로 $P'Q'$ 는 사이클을 구성할 수 없다. 왜냐하면 경로 Q' 를 구성하는 에지들은 경로 P' 를 구성하는 에지들을 순환적으로 이동하여 구성한 에지들이 아니므로 보조정리 1을 만족하지 못하고, 에지 s_1 가 경로 P' 상에 존재하

지 않으므로 보조정리 2를 만족하지 못하기 때문이다. 또한 경로 $P''=CR_x(H_4) \oplus CR_x(H_3)^{-s1}$ 와 경로 $Q''=c \circ H_2 \oplus H_1^{-i_g}$ (또는 i_i)상에는 공통 노드가 존재하지 않는다. 왜냐하면 경로 Q'' 를 구성하는 에지들과 경로 P'' 를 구성하는 에지들은 동일하지 않으며, 에지 s_1 와 i_g (또는 i_i)가 경로 P'' 와 Q'' 상에 존재하지 않기 때문이다. 이상의 증명에 의해 경로 P 와 경로 Q 상에는 공통 노드가 존재하지 않는다는 것을 알 수 있으므로 경로 P 와 경로 Q 사이에 에지 중복이 없다는 것을 알 수 있다.

4) $\alpha \subset H_4$ 이고 $dist(U,V)=H_{UV}$ 인 경우: 경로 P 는 $\alpha \circ CR_x(H_1) \oplus CR_x(H_2) \circ \alpha$ 또는 $\alpha \circ h_1 \circ CR_x(H_2) \oplus CR_x(H_1) \circ \alpha \circ h_1$ 이고, 경로 Q 는 $c \circ H_2 \oplus H_1 \circ c$ 이다. 경로 P 와 경로 Q 를 연결한 경로를 PQ 라고 하면, 경로 PQ 는 보조정리 1에 의해 사이클을 구성함을 알 수 있다. 그러므로 경로 P 와 경로 Q 사이에 에지 중복이 없다는 것을 알 수 있다.

5) $\alpha \subset H_4$ 이고 $dist(U,V)=2d-2-H_{UV}$ 인 경우: 경로 P 는 $CR_x(H_4) \oplus CR_x(H_3) \circ c$ 이고 경로 Q 는 $c \circ H_4 \oplus H_3$ 이다. 경로 P 와 경로 Q 를 연결한 경로를 PQ 라고 하면, 경로 PQ 는 보조정리 1에 의해 사이클을 구성함을 알 수 있다. 그러므로 경로 P 와 경로 Q 사이에 에지 중복이 없다는 것을 알 수 있다. □

[정리 4] 노드 $U(=0^{d-2}1^{d-1})$ 를 정점으로 하는 스페닝 트리 T_β 와 T_γ 는 에지 중복 없는 스페닝 트리이다($d \geq 3, d \leq \beta \leq \gamma \leq 2d-3$).

(증명) 트리 T_β 와 T_γ 는 E_d 의 스페닝 트리임을 정리 1에서 증명하였다. E_d 의 임의의 노드를 V 라고 하자. 스페닝 트리 T_β 내부의 노드 U 로부터 노드 V 에 이르는 경로를 P 라고 하고, 스페닝 트리 T_γ 내부의 노드 U 로부터 노드 V 에 이르는 경로를 Q 라고 하자. 경로 P 와 경로 Q 사이에 에지 중복이 없다는 것을 보임으로써 T_β 와 T_γ 는 에지 중복 없는 스페닝 트리임을 보이겠다. 다음의 다섯 가지 경우로 나누어 증명하겠다.

1) $V = \bar{U}$ 인 경우: 경로 P 는 $[\beta, c, \beta]$ 이고, 경로 Q 는 $[\gamma, c, \gamma]$ 이므로 두 경로 상에는 에지 중복이 없음을 쉽게 알 수 있다.

2) $\beta, \gamma \subset H_2$ 인 경우: 주어진 알고리즘에 의하면 경로 P 는 $CR_x(H_2) \oplus CR_x(H_1)$ 에 의해 구성됨을 알 수 있고, 경로 Q 는 $CR_a(H_2) \oplus CR_a(H_1)$ 에 의해 구성됨을 알 수 있다. $\beta \neq \gamma$ 이므로 $a \neq x$ 이다. 이것은 경로 Q 가 경로 P 를 왼쪽으로 $|a-x|$ 만큼 로테이트한 경로임을 나타낸다. 보조정리 1에 의해 경로 P 와 경로 Q 를 연결하면 에지 중복 없는 사이클을 구성하므로, 두 경로 상에는 에지 중복이 없다는 것을 알 수 있다.

3) $\beta \subset H_4$ 이고 $dist(U,V)=H_{UV}=d-2$ 이고 $d=$ 홀수인 경우:

3-1) $\gamma \subset H_2$ 인 경우: 경로 P 는 $CR_x(H_4) \oplus CR_x(H_3)^{-s1} \circ c \circ$

s_1 에 의해 구성되고 경로 Q 는 $CR_a(H_2) \oplus CR_a(H_1)$ 에 의해 구성된다. 보조정리 2에 의해 경로 P 와 경로 Q 를 연결하면 에지 중복 없는 사이클을 구성하므로, 두 경로 상에는 에지 중복이 없다는 것을 알 수 있다.

3-2) $\gamma \subset H_4$ 인 경우: 경로 P 는 $CR_x(H_4) \oplus CR_x(H_3)^{-s_1} \circ c \circ s_1$ 에 의해 구성되고 경로 Q 는 $CR_a(H_4) \oplus CR_a(H_3)^{-h_1} \circ c \circ h_1$ 에 의해 구성된다. h_1 은 $CR_a(H_3)$ 의 첫 번째 에지이다. $\beta \neq \gamma$ 이므로 $a \neq x$ 이다. 이것은 경로 Q 가 경로 P 를 왼쪽으로 $|\alpha-x|$ 만큼 로테이트한 경로임을 나타낸다. 보조정리 1에 의해 경로 P 와 경로 Q 를 연결하면 에지 중복 없는 사이클을 구성하므로, 두 경로 상에는 에지 중복이 없다는 것을 알 수 있다.

4) $\beta \subset H_2$ 이고 $\gamma \subset H_4$ 인 경우:

4-1) $dist(U,V)=H_{UV} \neq d-1$ 인 경우: 경로 P 는 $CR_x(H_2) \oplus CR_x(H_1)$ 에 의해 구성됨을 알 수 있고, 경로 Q 는 $\alpha \circ CR_a(H_1) \oplus CR_a(H_2) \circ \alpha$ 또는 $\alpha \circ h_1 \circ CR_a(H_2) \oplus CR_a(H_1) \circ \alpha \circ h_1$ 에 의해 구성됨을 알 수 있다. h_1 은 $CR_a(H_1)$ 의 첫 번째 에지이다. 보조정리 1에 의해 경로 P 와 경로 Q 를 연결하면 에지 중복 없는 사이클을 구성하므로, 두 경로 상에는 에지 중복이 없다는 것을 알 수 있다.

4-2) $dist(U,V)=2d-2-H_{UV}$ 인 경우: 경로 P 는 $CR_x(H_2) \oplus CR_x(H_1)$ 에 의해 구성됨을 알 수 있고, 경로 Q 는 $CR_a(H_4) \oplus CR_a(H_3) \circ c$ 에 의해 구성됨을 알 수 있다. 보조정리 2에 의해 경로 P 와 경로 Q 를 연결하면 에지 중복 없는 사이클을 구성하므로, 두 경로 상에는 에지 중복이 없다는 것을 알 수 있다.

5) $\beta, \gamma \subset H_4$ 인 경우: 경로 P 는 $\alpha \circ CR_x(H_1) \oplus CR_x(H_2) \circ \alpha$ 또는 $\alpha \circ h_1 \circ CR_x(H_2) \oplus CR_x(H_1) \circ \alpha \circ h_1$ 에 의해 구성됨을 알 수 있고, 경로 Q 는 $\alpha \circ CR_a(H_1) \oplus CR_a(H_2) \circ \alpha$ 또는 $\alpha \circ h_1 \circ CR_a(H_2) \oplus CR_a(H_1) \circ \alpha \circ h_1$ 에 의해 구성됨을 알 수 있다. h_1 은 $CR_a(H_1)$ 의 첫 번째 에지이다. 보조정리 1에 의해 경로 P 와 경로 Q 를 연결하면 에지 중복 없는 사이클을 구성하므로, 두 경로 상에는 에지 중복이 없다는 것을 알 수 있다. □

4. 결론

본 논문에서는 이븐 연결망에서 에지 중복 없는 스패닝 트리를 구성하는 알고리즘을 제안하였다. 그리고 제안한 알고리즘에 의해 구성된 스패닝 트리의 높이는 $d=3$ 일 때는 3이고, $d=4$ 일 때는 5이며, $d \geq 5$ 일 때는 $2d-4$ 임을 보였다. 또한, 본 논문에서 제안한 알고리즘에 의해 구성된 스패닝 트리들이 모두 에지 중복 없는 스패닝 트리임을 보였다. 제안한 알고리즘에 의해 이븐 연결망에서 최대 분지수-1개의 에지가 고장이 발생해도 에지 중복 없는 스패닝 트리를 구성할 수 있다는 것을 알 수 있고, 에지 중복 없는 스패닝 트리에 의해 고장 에지를 갖는 하나의 노드로부터 이븐 연결망의 다른 모든 노드로 에지 중복 없이 메시지를 전달할 수

있음을 알 수 있다. 이븐 연결망이 분지수만큼의 에지 중복 없는 스패닝 트리를 갖는다는 것은 이븐 연결망이 고장허용도가 좋은 연결망임을 의미하고, 이븐 연결망에 효율적인 방송 기법을 적용할 수 있다는 것을 의미한다.

참고 문헌

- [1] P. Fragopoulou and S.G. Akl, "Edge-disjoint spanning trees on the star network with applications to fault tolerance," IEEE Trans. Computers, Vol.45, No.2, pp.174-185, 1996.
- [2] P. Fraigniaud and C.T. Ho, "Arc-disjoint spanning trees on the cube connected cycles network," Proc. International Conference on Parallel Processing, pp.225-229, 1991.
- [3] A. Ghafoor, "A Class of Fault-Tolerant Multiprocessor Networks," IEEE Trans. Reliability, Vol.38, No.1, pp.5-15, 1989.
- [4] A. Ghafoor, "Partitioning of Even Networks for Improved Diagnosability," IEEE Trans. Reliability, Vol.39, No.3, pp.281-286, 1990.
- [5] S.-Y. Hsieh and C.-J. Tu, "Constructing edge-disjoint spanning trees in locally twisted cubes," Theoretical Computer Science, Vol.410, pp.926-932, 2009.
- [6] S.L. Johnson and C.T. Ho, "Optimal broadcasting and personalized communication in hypercubes," IEEE Trans. Computers, Vol.38, No.9, pp.1249-1268, 1989.
- [7] J.-S. Kim, H.-O. Lee, S.W. Kim, "Comments on "A Class of Fault-Tolerant Multiprocessor Networks"," IEEE Trans. Reliability, Vol.58, No.3, pp.496-500, 2009.
- [8] J.-S. Kim, H.-O. Lee, S.W. Kim, "One-to-All Broadcasting of Even Networks for One-port and All-port Models," ETRI Journal, Vol.31, No.3, pp.330-332, 2009.
- [9] C.-T. Lin, "Embedding $k(n-k)$ edge-disjoint spanning trees in arrangement graphs," J. Parallel and Distributed Computing, Vol.63, pp.1277-1287, 2003.
- [10] S.V.R. Madabjushi, S. Lakshmirarahan and S.K. Dhall, "Analysis of The Modified Even Networks," Proc. Int'l Conf. Parallel and Distributed Processing, pp.128-131, 1991.
- [11] W. Shi and P.K. Srimani, "One to all broadcast in hyper butterfly networks," International Conference on High Performance Computing, pp.155-162, 1998.
- [12] 김종석, 이형욱, "이븐 연결망의 노드 중복 없는 병렬경로," 정보과학회 논문지 : 시스템 및 이론, Vol.35, No.9, pp.421-428, 2008.
- [13] 김종석, 심현, 이형욱, "폴리드 하이퍼큐브와 이븐연결망, 오드 연결망 사이의 임베딩 알고리즘," 정보과학회 논문지 : 시스템 및 이론, Vol.35, No.7·8, pp.318-326, 2008.
- [14] 김종석, 김성원, 이형욱, "하이퍼스타 연결망 $HS(2n,n)$ 의 에지 중복 없는 최적 스패닝 트리," 정보처리학회논문지A, Vol.15-A, No.6, pp.345-350, 2008.



김 종 석

e-mail : rockhee7@gmail.com
1995년 순천대학교 전자계산학과(학사)
2001년 순천대학교 컴퓨터과학과(이학석사)
2004년 순천대학교 컴퓨터과학과(이학박사)
2005년~2008년 오클라호마 주립대학교 컴
퓨터과학과 박사후과정생

2008년~현 재 영남대학교 정보통신공학과 연구교수
관심분야: 병렬 및 분산처리, 계산이론, 네트워크 설계 및 분석



김 성 원

e-mail : swon@ynu.ac.kr
1990년 서울대학교 제어계측공학과(학사)
1992년 서울대학교 제어계측공학과(공학석사)
2002년 서울대학교 전기컴퓨터공학부(공학
박사)
2005년~현 재 영남대학교 정보통신공학
과 부교수

관심분야: 무선 네트워크, 모바일 네트워크, 임베디드시스템